

Seminar *Integrable Systeme und das KAM-Theorem*

VORTRAG 10: EIN MODELL FÜR DAS KAM THEOREM

Gabriele Benedetti

2. Februar 2019

1 Klassifizierung der Kreisdiffeomorphismen

Im Vortrag 9 haben wir die Poincaré Klassifizierung von Homöomorphismen des Kreis $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bis auf Konjugation vorgestellt. Es sei $C^0(S^1, S^1)$ die Menge der orientierungstreuen Diffeomorphismen von Klasse C^k $\phi : S^1 \rightarrow S^1$. Für jede $\omega \in S^1$ betrachten wir die Rotation $R_\omega \in C^0(S^1, S^1)$ mit Rotationswinkel ω und betrachten wir das folgende Problem: Es sei $\phi \in C^0(S^1, S^1)$ gegeben. Wann gibt es eine Rotation R_ω und einen $H \in C^0(S^1, S^1)$, für die

$$\phi \circ H = H \circ R_\omega?$$

Wir haben dazu die Rotationszahl $\rho : C^0(S^1, S^1) \rightarrow S^1$ eingeführt, die invariant unter Konjugation ist und für Rotationen die erwartete Formel

$$\rho(R_\omega) = \omega$$

besitzt. Also sehen wir, dass wenn H und R_ω für ϕ existieren, dann muss $\omega = \rho(\phi)$ sein. Allerdings haben wir im Vortrag 9 gezeigt, dass wenn $\rho(\phi)$ rational oder ϕ nicht C^2 ist, muss die Konjugation H nicht existieren. Diese Gegenbeispiele sind scharf, da der Poincaré Satz gilt:

$$\phi \in C^0(S^1, S^1), \phi \in C^2, \rho(\phi) \notin \mathbb{Q} \quad \implies \quad \exists H \in C^0(S^1, S^1), \quad \phi \circ H = H \circ R_{\rho(\phi)}.$$

Wir beobachten im Satz von Poincaré einen Verlust der Regularität: die Abbildung ϕ ist der Klasse C^2 aber H nur der Klasse C^0 . Dieses ist ein wesentliches Phenomen, da es auch hier Gegenbeispiele gibt, wobei H nicht regulärer als C^0 ist. Trotzdem könnten wir erwarten, dass wenn $\phi \in C^k$ für $k \geq 2$ ist, hat die Konjugation H die Regularität C^{k-2} . Diese Erwartung geht in die gute Richtung aber ist nicht ganz richtig. Wir haben gesehen, dass eine C^0 -Konjugation zu finden ist, nur wenn die Rotationszahl irrational ist. Entsprechend werden wir eine regulärere Konjugation finden nur wenn die Rotationszahl sehr irrational

ist, d.h. wenn die Rotationszahl schlecht approximierbar durch rationalen Zahlen ist. Wenn $k \geq 1$ führen wir dazu die Notation $C^k(S^1, S^1)$ für die Elemente $\phi \in C^0(S^1, S^1)$, sodass ϕ der Klasse C^k ist und $\phi'(x) > 0$ für alle $x \in S^1$ gilt. Nach der Definition ist $\phi \in C^k(S^1, S^1)$ äquivalent zu $\phi^{-1} \in C^k(S^1, S^1)$.

Satz 1.1 (Herman, 1980). *Es gibt eine Menge $\Omega \subset S^1$ vom vollen Maß und leeren Inneren, sodass für alle $k \geq 2$ gilt*

$$\phi \in C^k(S^1, S^1), \quad \rho(\phi) \in \Omega \quad \implies \quad \exists H \in C^{k-2}(S^1, S^1), \quad \phi \circ H = H \circ R_{\rho(\phi)}.$$

Wir werden heute den Satz von Arnold (1961) beweisen, der als erstes Resultat der Regularitätstheorie für die Konjugation betrachtet werden kann. Dieser Satz ist schwächer als der Satz von Herman sein, indem wir Abbildungen ϕ betrachten, die reell analytisch und nah an der Identität sind. Der Beweis basiert auf die Ideen hinter dem KAM-Theorem. Um eine genaue Aussage zu formulieren, brauchen wir ein bisschen Notation einzuführen.

2 Notation

Für jede $\phi \in C^0(S^1, S^1)$ existiert es eine stetige Funktion $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi = R_\rho + \eta, \quad \rho := \rho(\phi). \tag{2.1}$$

Die Funktion η ist eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante. Umgekehrt sei $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ der Klasse C^k mit $k \geq 1$ gegeben. Dann ist $\phi := R_\rho + \eta$ ein Element in $C^k(S^1, S^1)$ genau dann, wenn $\eta'(x) > -1$ für alle $x \in S^1$. Bis auf der Addition einer Konstante zu η nehmen wir an, dass $\rho(R_\rho + \eta) = \rho$. Wenn die Supremum-Norm von η klein als 1 ist, gibt diese letzte Bedingung folgendes Resultat.

Hilfsatz 2.1. *Es sei $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|\eta(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn $\rho(R_\rho + \eta) = \rho$, dann existiert $x_0 \in S^1$ mit $\eta(x_0) = 0$.*

Beweis. Es sei $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ die Abbildung $\phi = R_\rho + \eta$ und es sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von ϕ . Dann

$$\begin{aligned} \rho(\Phi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Phi^{j+1}(x) - \Phi^j(x)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Phi^j(x) + \rho + \eta(\Phi^j(x)) - \Phi^j(x)}{n} \\ &= \rho + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\eta(\Phi^j(x))}{n}. \end{aligned}$$

Laut der Voraussetzung ist $\rho(\Phi) - \rho \in \mathbb{Z}$ und nach den obigen Schritten und der Tatsache, dass $|\eta| < 1$, gilt

$$|\rho(\Phi) - \rho| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\eta(\Phi^j(x))|}{n} < 1.$$

Also $\rho(\Phi) = \rho$. Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\eta(\Phi^j(x))}{n} = 0 \quad \text{und daher} \quad \min \eta < 0 < \max \eta.$$

Da η stetig ist und S^1 zusammenhängend, existiert den gewünschten Punkt $x_0 \in S^1$ mit $\eta(x_0) = 0$. \square

2.1 Reelle analytische Funktionen

Es sei σ eine positive reelle Zahl. Wir bezeichnen mit $C_\sigma^\omega(S^1, S^1)$ die Menge der reellen analytischen orientierungstreuen Diffeomorphismen, die eine (einzige) beschränkte holomorphe Erweiterung auf dem Zylinder $Z_\sigma := \{z \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \mid |\Im z| < \sigma\}$ tragen. Das heißt, dass die in (3.3) definierte Funktion η Element der Vektorraum Funktionen die eine beschränkte holomorphe Erweiterung auf Z_σ tragen. Wir bezeichnen diesen Raum mit dem Symbol $C_\sigma^\omega = C_\sigma^\omega(S^1, \mathbb{R})$ und wir schreiben $\tilde{\eta} : Z_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ für die Erweiterung von η . Die Holomorphie von $\tilde{\eta}$ ist dann äquivalent zu der Existenz von einer beschränkten holomorphen Funktion $\zeta_\eta : A_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\zeta_\eta(e^{2\pi iz}) = \tilde{\eta}(z)$, wobei $A_\sigma := \{w \in \mathbb{C} \mid e^{-2\pi\sigma} < |w| < e^{2\pi\sigma}\}$ ein Kreisring um den Einheitskreis ist. Konkreter haben wir

$$\tilde{\eta}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}(n) e^{2\pi i n z}, \quad \zeta_\eta(w) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}(n) w^n. \quad (2.2)$$

Wenn $\eta \in C_\sigma^\omega$, dann ist $\phi = R_\rho + \eta \in C_\sigma^\omega(S^1, S^1)$ genau dann, wenn $\eta(x) \in \mathbb{R}$ und $\eta'(x) > -1$ für alle $x \in S^1$. Die Erweiterung von ϕ ist gegeben als $\tilde{\phi} = R_\rho + \tilde{\eta}$. Außerdem $\phi^{-1} \in C_{\sigma'}^\omega$ für irgendwelche $\sigma' > 0$, da $\tilde{\phi}|_{Z_\epsilon}$ für ein genügend kleines ϵ invertierbar ist.

Wir versehen C_σ^ω mit der vollständigen Norm $|\eta|_\sigma := \sup_{z \in Z_\sigma} |\tilde{\eta}(z)|$. Das nächste Resultat folgt nach dem Satz von Cauchy.

Hilfsatz 2.2. *Es seien $r' < r \leq \sigma$ und $d := r - r'$. Dann existiert eine Konstante $c(\sigma) > 0$, sodass*

$$\forall \theta \in C_r^\omega, \quad |\theta'|_{r'} \leq \frac{c(\sigma) |\theta|_r}{d^2}, \quad (2.3)$$

Daher, wenn $\theta_n \rightarrow \theta_\infty$ in C_r^ω , dann $\theta'_n \rightarrow \theta'_\infty$ in $C_{r'}^\omega$. \square

Wir sehen nun wie die Supremum-Norm auf dem Zylinder die Fourier-Koeffizienten bestimmt und umgekehrt.

Hilfsatz 2.3. *Es sei $r \leq \sigma$. Wenn $\theta \in C_r^\omega$, dann*

$$\|\theta\|_{0,r} := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(n)| e^{2\pi |n| r} \leq |\theta|_r.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Es sei nun $n \neq 0$. Da $\tilde{\theta}$ holomorph ist, lassen sich die Fourier-Koeffizienten für ein beliebiges $r \in (-s, s)$ durch die Formel

$$\hat{\theta}(n) = \int_{\Im z=r} \tilde{\theta}(z) e^{-2\pi i n z} dz$$

berechnen. Wir nehmen s mit $sn < 0$, sodass

$$|\hat{\theta}(n)| \leq \int_{\Im z=s} |\tilde{\theta}(z)| \cdot |e^{-2\pi i n z}| dz \leq |\theta|_r \int_{\Im z=s} e^{2\pi n \Im z} dz = |\theta|_r e^{-2\pi |n| |s|}$$

Für $|s| \rightarrow r$ folgt die Aussage. \square

Hilfsatz 2.4. *Es seien $r' < r \leq \sigma$ und $\nu \geq 0$ reelle Zahlen. Wir setzen $d := r - r'$. Wenn $q = (q_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset [0, +\infty)$ eine Folge reeller Zahlen mit*

$$\|q\|_r := \sup_{n \in \mathbb{Z}} q_n e^{2\pi |n| r} < \infty,$$

ist, haben wir dann die Abschätzung

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n |n|^\nu e^{2\pi |n| r'} \leq \frac{c(\nu, \sigma) \|q\|_r}{d^{\nu+1}}, \quad (2.4)$$

wobei $c(\nu, \sigma) > 0$ eine Konstante ist.

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n |n|^\nu e^{2\pi |n| r'} &\leq \|q\|_r \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\nu e^{-2\pi |n| (r-r')} \leq 2 \|q\|_r \sum_{n \geq 0} n^\nu e^{-2\pi n d} \\ &= \frac{2 \|q\|_r}{(2\pi d)^\nu} \sum_{n \geq 0} \Gamma_\nu(2\pi n d), \end{aligned}$$

wobei $\Gamma_\nu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ durch $\Gamma_\nu(x) = x^\nu e^{-x}$ gegeben ist. Diese Funktion ist monoton wachsend für $x \leq \nu$ und monoton fallend für $x \geq \nu$. Wir haben $2\pi n d \leq \nu$ für $n \leq \frac{\nu}{2\pi d}$. Daher $\frac{\nu}{2\pi d} + 1 \leq \frac{\nu + 2\pi\sigma}{2\pi d}$. Wir rechnen

$$\sum_{n \geq 0} \Gamma_\nu(2\pi n d) = \sum_{n \leq \frac{\nu}{2\pi d}} \Gamma_\nu(2\pi n d) + \sum_{n > \frac{\nu}{2\pi d}} \Gamma_\nu(2\pi n d) \leq \Gamma_\nu(\nu) \frac{\nu + 2\pi\sigma}{2\pi d} + \frac{1}{2\pi d} \int_\nu^\infty \Gamma_\nu(x) dx.$$

Schließlich gilt die gewünschte Abschätzung mit

$$c(\nu, \sigma) := 2 \frac{\Gamma_\nu(\nu)(\nu + 2\pi\sigma) + \int_\nu^\infty \Gamma_\nu(x) dx}{(2\pi)^{\nu+1}}$$

\square

Folgerung 2.5. *Es seien $r' < r \leq \sigma$ mit $d = r - r'$ und $\nu \geq 0$. Wenn $\theta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit*

$$\|\theta\|_{r,\nu} := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(n)| \frac{e^{2\pi|n|r}}{|n|^\nu} < \infty$$

ist, ist dann θ Element von C_r^ω und existiert eine Konstante $c(\nu, \sigma) > 0$ mit

$$|\theta|_{r'} \leq \frac{c(\nu, \sigma) \|\theta\|_r}{d^{\nu+1}}, \quad |\theta'|_{r'} \leq \frac{c(\nu, \sigma) \|\theta\|_r}{d^{\nu+2}}. \quad (2.5)$$

Beweis. Die obere Schranke für $|\theta|_{r'}$ und $|\theta'|_{r'}$ folgen unmittelbar aus (2.4) und die Entwicklungen (siehe (2.2))

$$\tilde{\theta}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}(n) e^{2\pi i n z}, \quad \tilde{\theta}'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi i n \hat{\theta}(n) e^{2\pi i n z}. \quad \square$$

2.2 Rotationszahl von Typ (α, τ)

Wir messen nun wie schlecht eine Zahl $\omega \in S^1$ durch Rationalen approximierbar ist. Dirichlet hat bewiesen, dass für alle ω folgen $(p_n) \subset \mathbb{Z}$ und $(q_n) \subset \mathbb{N}$, $q_n \rightarrow \infty$ existieren mit

$$\left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{\alpha}{|q_n|^\tau}, \quad \alpha = 1, \quad \tau = 2.$$

Wenn das Exponente $\tau = 2$ größer gewesen wäre, wäre auch die Annäherung besser gewesen. Aber nicht alle Zahlen lassen sich mit einem größeren Exponente approximieren. Eine Zahl $\omega \in S^1$ ist von Typ (α, τ) , wobei $\tau \geq 2$ und $\alpha > 0$, wenn

$$\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \quad \left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\alpha}{|q|^\tau}.$$

Wir definieren $\Omega_{\alpha,\tau}$ die Menge solcher Zahlen und schreiben wir die Vereinigung als

$$\Omega_\tau := \bigcup_{\alpha \downarrow 0} \Omega_{\alpha,\tau}.$$

Wenn $\tau > 2$, ist die Menge Ω_τ mit vollem Maß und leerem Inneren. Andererseits besitzt die Menge Ω_2 null Mass, aber der berühmte goldene Schnitt gehört zu Ω_2 .

2.3 Aussage des Satzes von Arnold

Satz 2.6 (Arnold, 1961). *Für alle $\alpha > 0$, $\tau \geq 2$ und $0 < \sigma' < \sigma$ gibt es eine Konstante $\epsilon(\tau, \sigma', \sigma) > 0$ sodass, wenn $\phi \in C_\sigma^\omega(S^1, S^1)$ mit $|\eta|_\sigma < \min\{\alpha, 1\}\epsilon(\tau, \sigma', \sigma)$, dann existiert $H \in C_{\sigma'}^\omega(S^1, S^1)$, sodass*

$$\phi \circ H = H \circ R_{\rho(\phi)}. \quad (2.6)$$

Später hat Moser eine Version des Satzes von Arnold bewiesen, in der man $\phi \in C^k(S^1, S^1)$ mit $|\eta|_{C^k}$ klein annimmt und $H \in C^{k-h}(S^1, S^1)$ mit $h = 333$ (später $h = 2$) bekommt. Auf ähnlicher Weise lässt sich der globale Satz von Herman auch für reelle analytische Funktionen bewiesen lassen.

3 Der Beweis

Ab diesem Punkt betrachten wir eine feste Abbildung $\phi \in C_\sigma^\omega$ mit $\phi = R_\rho + \eta$ mit $\rho = \rho(\phi)$. Unser Ziel ist nun den Satz von Arnold zu beweisen. Wir müssen nämlich $\epsilon(\alpha, \tau, \sigma', \sigma)$ bestimmen, sodass wenn $|\eta|_\sigma < \epsilon(\alpha, \tau, \sigma', \sigma)$, dann existiert $H \in C_{\sigma'}^\omega(S^1, S^1)$ mit $\phi \circ H = H \circ R_\rho$.

3.1 Die grobe Idee

Die Idee ist H als Limes einer Verkettung von unendlichen vielen Abbildungen zu schreiben. Die Abbildungen werden auf kleineren und kleineren $Z_{\sigma'}$ enthaltenden Zylindern definiert. Also es sei $(\sigma_n(\sigma', \sigma))$ eine streng monoton fallende Folge mit $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_n \rightarrow \sigma'$. Es seien weiter $\mu_n(\sigma', \sigma)$ und $\Delta_n(\sigma', \sigma)$ der Mittelpunkt und die Länge des Intervalls $[\sigma_{n+1}, \sigma_n]$. Wir werden dann für jede $n \geq 0$ eine Abbildung $G_n \in C_{\mu_n}^\omega(S^1, S^1)$ konstruieren und definieren

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n, \quad H_n := G_0 \circ \dots \circ G_n. \quad (3.1)$$

Es sei nun $g_n \in C_{\mu_n}^\omega$, so dass $G_n = \text{id} + g_n$. Wir verlangen, dass g_n die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |g'_n|_{\mu_n} < \infty, \quad (3.2)$$

$$(ii) \quad \exists \lambda \in (0, 1), \quad \forall n \geq 0, \quad |g_n|_{\mu_n} \leq \frac{\Delta_n}{6}, \quad |g'_n|_{\mu_n} \leq \lambda < 1.$$

Nach (ii) gilt $\tilde{G}_n : Z_{\mu_n} \rightarrow Z_{\mu_n + \frac{\Delta_n}{6}}$ und existiert die Inverse $\tilde{G}_n^{-1} : Z_{\mu_n - \frac{\Delta_n}{6}} \rightarrow Z_{\mu_n}$. Also H_n ist wohl definiert als Element von $C_{\mu_n}^\omega(S^1, S^1)$. Entsprechend ergibt sich eine Folge

$$\phi_0 = \phi, \quad \phi_{n+1} = G_n^{-1} \circ \phi_n \circ G_n. \quad (3.3)$$

Wir schreiben $\phi_n = R_\rho + \eta_n$. Wenn wir wissen für irgendwelche $n_0 \geq 0$, dass $\phi_{n_0} \in C_{\sigma_{n_0}}^\omega$ und $|\eta_{n_0}|_{\sigma_{n_0}} < \Delta_{n_0}/6$, ergibt sich aus (3.3), dass $\phi_{n_0+1} \in C_{\sigma_{n_0+1}}^\omega$. Also verlangen wir auch die Bedingung

$$(iii) \quad \forall n \geq 0, \quad |\eta_n|_{\sigma_n} \leq \frac{\Delta_n}{6}. \quad (3.4)$$

Hilfsatz 3.1. *Wenn die Folgen (G_n) und (ϕ_n) den Bedingungen (i), (ii) und (iii) in (3.2) und (3.4) genügen, existiert der von (3.1) definierte Limes H in $C_{\sigma'}^\omega(S^1, S^1)$ und $\phi \circ H = H \circ R_\rho$ gilt.*

Beweis. Da $C_{\sigma'}^\omega$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |H_{n+1} - H_n|_{\sigma'} < \infty,$$

um die Existenz von H zu beweisen. Erstens haben wir nach der Kettenregel

$$|H'_n|_{\mu_n} = \prod_{j=0}^n |G'_j|_{\mu_j} \leq \prod_{j=0}^n (1 + |g'_j|_{\mu_j}) \leq \prod_{j=0}^n e^{|g'_j|_{\mu_j}} = e^{\sum_{j=0}^n |g'_j|_{\mu_j}} \leq e^{\sum_{j=0}^{\infty} |g'_j|_{\mu_j}}.$$

Dann nach dem Mittelwertsatz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |H_{n+1} - H_n|_{\mu_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} |H_n \circ G_{n+1} - H_n|_{\mu_{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |H'_n|_{\mu_n} |g_{n+1}|_{\mu_{n+1}} \leq e^{\sum_{j=0}^{\infty} |g'_j|_{\mu_j}} \frac{\sigma - \sigma'}{6}.$$

Nach der Definition von ϕ_n in (3.3) haben wir

$$\phi \circ H_n = H_n \circ \phi_{n+1}.$$

Die linke Seite konvergiert gegen $\phi \circ H$ nach dem Mittelwertsatz, da

$$|\phi \circ H - \phi \circ H_n|_{\sigma'} \leq |\phi'|_{\sigma_1} |H - H_n|_{\sigma'}.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen $H \circ R_\rho$ auch nach dem Mittelwertsatz, da

$$\begin{aligned} |H_n \circ \phi_{n+1} - H \circ R_\rho|_{\sigma'} &\leq |H_n \circ \phi_{n+1} - H_n \circ R_\rho|_{\sigma'} + |H_n \circ R_\rho - H \circ R_\rho|_{\sigma'} \\ &\leq |H'_n|_{\mu_n} |\eta_{n+1}|_{\sigma_{n+1}} + |H_n - H|_{\sigma'} \\ &\leq e^{\sum_{j=0}^{\infty} |g'_j|_{\mu_j}} |\eta_{n+1}|_{\sigma_{n+1}} + |H_n - H|_{\sigma'} \end{aligned}$$

Schließlich ist die Abbildung $H : S^1 \rightarrow S^1$ invertierbar, da

$$|H'_n|_{\sigma'} = \prod_{j=0}^n |G'_j|_{\sigma'} \geq \prod_{j=0}^n (1 - |g'_j|_{\sigma'}) \geq \prod_{j=0}^n e^{-\epsilon(\lambda)|g'_j|_{\sigma'}} = e^{-\sum_{j=0}^n \epsilon(\lambda)|g'_j|_{\sigma'}} \geq e^{-\epsilon(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} |g'_j|_{\mu_j}}.$$

Nach (2.3) konvergiert $H'_n \rightarrow H'$ pünktlich. Daher gilt $|H'|_{\sigma'} \geq e^{-\epsilon(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} |g'_j|_{\mu_j}} > 0$ und H ist ein Diffeomorphism. \square

3.2 Die induktive Definition der Folgen

Wir werden nun die Folgen ϕ_n und H_n (äquivalent η_n und g_n) induktiv finden. Wir setzen $\phi_0 = \phi$ und definieren g_n aus η_n und η_{n+1} aus g_n und ϕ_n . Für die zweite Definition setzen wir wie im letzten Abschnitt

$$\phi_{n+1} = G_n^{-1} \circ \phi_n \circ G_n, \quad \phi_0 = \phi. \quad (3.5)$$

Für die erste Definition schreiben wir zuerst die Gleichung (2.6) explizit als

$$x + h(x) + \rho + \eta(x + h(x)) = x + \rho + h(x + \rho), \quad \forall x \in S^1.$$

Wir erreichen die äquivalente Bedingung

$$h(x + \rho) - h(x) = \eta(x + h(x)), \quad \forall x \in S^1, \quad (3.6)$$

die eine nicht-lineare Gleichung in der Unbekannten h ist. Wenn wir nach einer kleinen Lösung h suchen, sehen wir, dass man (3.6) durch die lineare Gleichung

$$h(x + \rho) - h(x) = \eta(x) - \hat{\eta}(0) \quad (3.7)$$

approximieren kann, wobei wir den Term $\hat{\eta}(0)$ von der rechten Seite abgezogen haben, da die linke Seite verschwindendes Mittel besitzt. Also definieren wir g_0 als die Lösung in $C_{\mu_0}^\omega$ von (3.7) mit $\eta = \eta_0$. Allgemein definieren wir g_n als die Lösung in $C_{\mu_n}^\omega$ von (3.7) mit $\eta = \eta_n$. Also

$$g_n(x + \rho) - g_n(x) = \eta_n(x) - \hat{\eta}_n(0). \quad (3.8)$$

Wir sehen in übernächsten Abschnitt, dass eine solche Funktion g_n existiert. Als Vorbereitung zeigen wir im nächsten Abschnitt, welche Abschätzungen wir bekommen, wenn wir einen generischen Schritt der Induktion nehmen.

4 Die Lösung der linearen Gleichung

Es seien $\sigma' \leq s' < s \leq \sigma$ mit m und d der Mittelpunkt und die Länge von $[s', s]$. Wir betrachten nun eine Funktion $\xi \in C_s^\omega$. Es sei γ eine Lösung von

$$\gamma(x + \rho) - \gamma(x) = \xi(x) - \hat{\xi}(0). \quad (4.1)$$

Wenn wir die Fourier-Koeffizienten von beiden Seiten nehmen, finden wir für $n \neq 0$

$$(e^{2\pi i n \rho} - 1)\hat{\gamma}(n) = \hat{\xi}(n), \quad \iff \quad \hat{\gamma}(n) = \frac{\hat{\xi}(n)}{e^{2\pi i n \rho} - 1}.$$

Außerdem nehmen wir $\hat{\gamma}(0) = 0$, also

$$\gamma(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{\xi}(n)}{e^{2\pi i n \rho} - 1} e^{2\pi i n x}. \quad (4.2)$$

Die Funktion γ nimmt reelle Werte, da für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\overline{\hat{\gamma}(n)} = \frac{\overline{\hat{\xi}(n)}}{e^{2\pi i n \rho} - 1} = \frac{\hat{\xi}(-n)}{e^{2\pi i (-n)\rho} - 1} = \hat{\gamma}(-n).$$

Wir möchten nun die Fourier-Koeffizienten von γ abschätzen und aus dieser Abschätzung auch die Norm $|\gamma|_m$ beschränken. Zu diesem Zweck müssen wir die Größe der Zahlen $\hat{\xi}(n)$ und $(e^{2\pi i n \rho} - 1)^{-1}$ bestimmen. Für die Ersten benutzen wir Hilfsatz 2.3. Für die Zweiten spielt der Typ von ρ eine entscheidende Rolle.

Hilfsatz 4.1. *Es gibt eine Konstante $c(\alpha, \tau) > 0$, sodass für alle $\rho \in \Omega_{\alpha, \tau}$ und $n \neq 0$ gilt*

$$\frac{1}{|e^{2\pi i n \rho} - 1|} \leq \frac{|n|^{\tau-1}}{4\alpha}. \quad (4.3)$$

Beweis. Wir wählen $m \in \mathbb{Z}$, sodass $n\rho \in (m, m+1)$. Es sei angenommen, dass $n\rho \in (m, m + \frac{1}{2})$ (der Fall $n\rho \in (m + \frac{1}{2}, m+1)$ ist ähnlich). Dann

$$|e^{2\pi i n \rho} - 1| = |e^{2\pi i(n\rho - m)} - 1| = 2|\sin(\pi(n\rho - m))| \geq 2 \cdot 2|n\rho - m| \geq \frac{4\alpha}{|n|^{\tau-1}},$$

da $|\sin(\pi x)| \geq 2|x|$ für $x \in [-1/2, 1/2]$ und $\rho \in \Omega_{\alpha, \tau}$. □

Wir kommen nun zu der gewünschten Abschätzung.

Hilfsatz 4.2. *Es gibt eine Konstante $c(\tau, \sigma) > 0$, sodass die Lösung γ der linearen Gleichung (4.1) den Abschätzungen*

$$|\gamma|_m \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha d^\tau} |\xi|_s, \quad |\gamma'|_m \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha d^{\tau+1}} |\xi|_s,$$

genügt. Insbesondere

$$|\xi|_s \leq \frac{\alpha d^{\tau+1}}{6c(\tau, \sigma)} \implies |\gamma|_m \leq \frac{d}{6}, \quad |\gamma'|_m \leq \frac{1}{6}, \quad \Gamma := \text{id} + \gamma \in C_m^\omega(S^1, S^1).$$

Beweis. Aus die Entwicklung (4.2) und die Hilfsätze 4.1, 2.3 und 2.4 haben wir

$$|\hat{\gamma}(n)| \leq \frac{|n|^{\tau-1}}{4\alpha} \cdot |\xi|_s e^{-2\pi|n|s}.$$

Also gilt $\|\gamma\|_{r, \tau-1} \leq \frac{|\xi|_s}{4\alpha}$ und nach der Folgerung 2.5

$$|\gamma|_m \leq \frac{2^\tau c(\tau-1, \sigma)}{d^\tau} \frac{|\xi|_s}{4\alpha}, \quad |\gamma'|_m \leq \frac{2^{\tau+1} c(\tau-1, \sigma)}{d^{\tau+1}} \frac{|\xi|_s}{4\alpha}. \quad \square$$

Hilfsatz 4.3. *Es sei angenommen, dass $\Xi := R_\rho + \xi \in C_s^\omega(S^1, S^1)$ mit $\rho(\Xi) = \rho$. Es existiert eine Konstante $c(\tau, \sigma) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Wenn*

$$|\xi|_s \leq \min \left\{ \frac{d}{6}, \frac{\alpha d^{\tau+1}}{6c(\tau, \sigma)} \right\}, \quad |\xi|_s + \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha d^{\tau+2}} |\xi|_s^2 \leq \frac{5}{6}, \quad (4.4)$$

dann $\Xi_1 := \Gamma^{-1} \circ \Xi \circ \Gamma \in C_{s'}^\omega(S^1, S^1)$ und

$$|\xi_1|_{s'} \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha d^{\tau+2}} |\xi|_s^2, \quad (4.5)$$

wobei $\xi_1 \in C_{s'}^\omega$ durch $\Xi_1 = R_\rho + \xi_1$ definiert ist.

Beweis. Wir wissen nach (4.4) und Hilfsatz 4.2, dass

$$\Gamma : Z_{s'} \rightarrow Z_{s'+\frac{d}{6}}, \quad \Xi : Z_{s'+\frac{d}{6}} \rightarrow Z_{m-\frac{d}{6}} \quad \Gamma^{-1} : Z_{m-\frac{d}{6}} \rightarrow Z_m.$$

Daher ist $\Xi_1 \in C_{s'}^\omega(S^1, S^1)$. Wie in (3.6) schreiben wir die Gleichung

$$\tilde{\Xi} \circ \tilde{\Gamma}(z) = \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\Xi}_1(z), \quad \forall z \in Z_{s'} \quad (4.6)$$

als eine Gleichung für $\tilde{\xi}_1(z)$. Die Identität (4.6) ist nähmlich äquivalent zu

$$\underbrace{\tilde{\Gamma}(z)}_{z+\tilde{\gamma}(z)} + \rho + \tilde{\xi}(z + \tilde{\gamma}(z)) = \underbrace{\tilde{\Xi}_1(z)}_{z+\rho+\tilde{\xi}_1(z)} + \tilde{\gamma}(\underbrace{\tilde{\Xi}_1(z)}_{z+\rho+\tilde{\xi}_1(z)}).$$

Es ergibt also die Gleichung

$$\tilde{\xi}_1(z) = \tilde{\gamma}(z) + \tilde{\xi}(z + \tilde{\gamma}(z)) - \tilde{\gamma}(z + \rho + \tilde{\xi}_1(z))$$

Wir ersetzen $\tilde{\gamma}(z)$ mit dem Ausdruck $\tilde{\gamma}(z) = \tilde{\gamma}(z + \rho) + \hat{\xi}(0) - \tilde{\xi}(z)$, der aus die Gleichung (4.1) für die Erweiterungen gewinnen und bekommen schließlich

$$\tilde{\xi}_1(z) = \hat{\xi}(0) + \left(\tilde{\xi}(z + \tilde{\gamma}(z)) - \tilde{\xi}(z) \right) + \left(\tilde{\gamma}(z + \rho) - \tilde{\gamma}(z + \rho + \tilde{\xi}_1(z)) \right). \quad (4.7)$$

Wir nehmen den Betrag und benutzen die Dreiecksungleichung:

$$|\tilde{\xi}_1(z)| \leq |\hat{\xi}(0)| + |\tilde{\xi}(z + \tilde{\gamma}(z)) - \tilde{\xi}(z)| + |\tilde{\gamma}(z + \rho) - \tilde{\gamma}(z + \rho + \tilde{\xi}_1(z))|. \quad (4.8)$$

Wir schätzen den zweiten und dritten Summand auf der rechten Seite mittels des Mittelwertsatzes. Für den zweiten Summand benutzen wir den Hilfsatz 2.3, die Folgerung 2.5 und den Hilfsatz 4.2:

$$|\tilde{\xi}(z + \tilde{\gamma}(z)) - \tilde{\xi}(z)| \leq |\xi'|_{s'+\frac{d}{6}} |\gamma|_{s'} \leq \frac{c(0, \sigma)}{d^2} |\xi|_s \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha d^\tau} |\xi|_s = \frac{c(0, \sigma)c(\tau, \sigma)}{\alpha d^{\tau+2}} |\xi|_s^2.$$

Für den dritten Summand benutzen wir Hilfsatz 4.2

$$|\tilde{\gamma}(z + \rho) - \tilde{\gamma}(z + \rho + \tilde{\xi}_1(z))| \leq |\gamma'|_{s'+\frac{d}{6}} |\xi_1|_{s'} \leq \frac{|\xi_1|_{s'}}{6}.$$

Wir setzen diese Abschätzung in (4.8) ein:

$$|\tilde{\xi}_1(z)| \leq \frac{6}{5} \left(|\hat{\xi}(0)| + \frac{c(0, \sigma)c(\tau, \sigma)}{\alpha d^{\tau+2}} |\xi|_s^2 \right). \quad (4.9)$$

Die Abschätzung von $|\hat{\xi}(0)|$ erfolgt in zwei Schritten. Erstmal $|\hat{\xi}(0)| \leq |\xi|_s$, da $\hat{\xi}(0)$ das Mittel von ξ auf S^1 ist. Nach der zweiten Ungleichung in (4.4) folgt $|\tilde{\xi}_1(z)| < 1$. Also können wir Hilfsatz 2.1 benutzen und ein $x_0 \in S^1$ finden, sodass $\xi_1(x_0) = 0$. Wenn wir $z = x_0$ in (4.7) einsetzen, bekommen wir

$$0 = \hat{\xi}(0) + \left(\xi(x_0 + \gamma(x_0)) - \xi(x_0) \right).$$

Daher

$$|\hat{\xi}(0)| \leq |\xi'|_{\frac{d}{6}} |\gamma|_0 \leq \frac{c(0, \sigma)c(\tau, \sigma)}{\alpha d^{\tau+2}} |\xi|_s^2.$$

Wir setzen diese Ungleichung in (4.9) ein und wir sind fertig. \square

5 Das Ende des Beweises

Es seien nun η_n und g_n die Folgen, die wir in (3.5) und (3.8) definiert haben. Um $\eta_n \in C_{\sigma_n}^\omega$ und $g_n \in C_{\mu_n}^\omega$ zu haben, muss nach Hilfsatz 4.3

$$\forall n \geq 0, \quad |\eta_n|_{\sigma_n} \leq \min \left\{ \frac{\Delta_n}{6}, \frac{\alpha \Delta_n^{\tau+1}}{6c(\tau, \sigma)} \right\}, \quad |\eta_n|_{\sigma_n} + \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^{\tau+2}} |\eta_n|_{\sigma_n}^2 \leq \frac{5}{6} \quad (5.1)$$

gelten. Wenn das wahrgeleistet würde, hätten wir auch

$$|g_n|_{\mu_n} \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^\tau} |\eta_n|_{\sigma_n} \leq \frac{\Delta_n}{6}, \quad |g'_n|_{\mu_n} \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^{\tau+1}} |\eta_n|_{\sigma_n} \leq \frac{1}{6}. \quad (5.2)$$

Auf dieser Weise werden auch die Bedingungen (ii) und (iii) im Abschnitt 3.1 erfüllt. Um die Abschätzung (5.1) zu erhalten, wollen wir, dass die Folge $|\eta_n|_{\sigma_n}$ sehr schnell gegen 0 konvergiert. Das wird von der Ungleichung

$$|\eta_{n+1}|_{\sigma_{n+1}} \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^{\tau+2}} |\eta_n|_{\sigma_n}^2, \quad (5.3)$$

die auch aus Hilfsatz 4.3 folgt, gesichert. Was entscheidend an dieser Ungleichung ist, ist, dass das Quadrat von $|\eta_n|_{\sigma_n}$ erscheint. Wenn der Koeffizient $\frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^{\tau+2}}$ nicht von n abhängen würde und $|\eta_0|_{\sigma_0} < 1$, würde dann folgen, dass $|\eta_n|_{\sigma_n} \leq (|\eta_0|_{\sigma_0})^{2^n}$ und die Konvergenz gegen null sehr schnell ist. In unserem Fall aber geht die $\frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^{\tau+2}}$ gegen unendlich denn die Länge Δ_n der Intervalle konvergiert gegen null. Wir überwinden dieses Hindernis, indem wir die Folge (σ_n) geschickt wählen. Was wichtig in dem Argument wird, ist dass Δ_n nicht zu schnell gegen 0 konvergiert. Das heißt, wir nehmen an, dass es eine positive Konstante $\beta(\sigma', \sigma)$ gibt mit

$$(iv) \quad \forall n \geq 0, \quad 1 \leq \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \leq \beta. \quad (5.4)$$

Man kann zum Beispiel $\beta > 1$ beliebig wählen und dann $\Delta_n := (1 - \sigma'/\sigma)(1 - \beta^{-1})\beta^{-n}$ nehmen. Die quadratische Konvergenz wird dann aus den nächsten abstrakten Hilfsatz folgen, wobei der untere Schranke in (iv) dort nicht nötig ist.

Hilfsatz 5.1. *Es seien b, c_-, c_+ drei positive Zahlen mit $c_- \leq bc_+$. Es seien q_-, q_+ zwei nicht negativer Zahlen mit $q_+ \leq \frac{1}{c_-} q_-^2$. Dann*

$$\frac{bq_+}{c_+} \leq \left(\frac{bq_-}{c_-} \right)^2.$$

Beweis. Die Aussage unmittelbar aus

$$\frac{bq_+}{c_+} \leq \frac{bq_-^2}{c_-c_+} = \left(\frac{bq_-}{c_-} \right)^2 \frac{c_-}{bc_+} \leq \left(\frac{bq_-}{c_-} \right)^2 \cdot 1. \quad \square$$

Beweis des Satzes von Arnold. Wir definieren

$$\epsilon(\tau, \sigma', \sigma) := \min \left\{ \frac{\Delta_0(\sigma', \sigma)}{6}, \frac{\Delta_0^{\tau+1}(\sigma', \sigma)}{6c(\tau, \sigma)}, y(\tau, \sigma', \sigma), \frac{\Delta_0^{\tau+2}(\sigma', \sigma)}{\beta(\sigma', \sigma)c(\tau, \sigma)} \right\}.$$

Hier $y(\tau, \sigma', \sigma)$ ist die einzige positive Lösung von

$$y + \frac{c(\tau, \sigma)}{\Delta_0^{\tau+2}} y^2 = \frac{5}{6}.$$

Es sei nun angenommen, dass $|\eta|_\sigma < \min\{\alpha, 1\}\epsilon(\tau, \sigma', \sigma)$. Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass η_n ein wohldefiniertes Element von $C_{\sigma_n}^\omega$ ist, dass (5.1) gilt und dass die Folge

$$(a_n) := \left(\beta c \frac{|\eta_n|_{\sigma_n}}{\Delta_n^{\tau+2}} \right)$$

monoton fallend und stets kleiner als 1 ist. Der Induktionsanfang folgt aus der Definition von $\epsilon(\tau, \sigma', \sigma)$. Es sei nun angenommen, dass $\eta_n \in C_{\sigma_n}^\omega$, dass (5.1) für n wahr ist und dass (a_k) monoton fallend bis $k = n$ und kleiner als 1 ist. Nach Hilfsatz 4.3 ist $\eta_{n+1} \in C_{\sigma_{n+1}}^\omega$ und (5.3) gilt. Wenn wir Hilfsatz 5.1 mit $q_- = |\eta_n|_{\sigma_n}$, $q_+ = |\eta_{n+1}|_{\sigma_{n+1}}$ und $c_- = \Delta_n^{\tau+2}/c(\tau, \sigma)$, $c_+ = \Delta_{n+1}^{\tau+2}/c(\tau, \sigma)$ benutzen, leiten wir aus Bedingung (iv), dass

$$a_{n+1} \leq a_n^2.$$

Da $a_n < 1$ sehen wir, dass $a_{n+1} < a_n < 1$. Da die Folge (Δ_n) monoton fallend nach (iv) und (a_k) monoton fallend bis $k = n + 1$ ist, folgt es dass auch die Folgen

$$\left(|\eta_k|_{\sigma_k} \right), \quad \left(\frac{|\eta_k|_{\sigma_k}}{\Delta_k} \right), \quad \left(\frac{|\eta_k|_{\sigma_k}}{\Delta_k^{\tau+1}} \right), \quad \left(\frac{|\eta_k|_{\sigma_k}}{\Delta_k^{\tau+2}} \right)$$

monoton fallend bis $k = n + 1$ sind. Daher ist (5.1) auch für $n + 1$ erfüllt. Der Induktionsschritt ist somit gezeigt. Um den Satz von Arnold zu beweisen, fehlt nur die Bedingung (i) zu zeigen:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} |g'_n|_{\mu_n} &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha \Delta_n^{\tau+1}} |\eta_n|_{\sigma_n} \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha} \sum_{n \geq 0} \frac{|\eta_n|_{\sigma_n}}{\Delta_n^{\tau+2}} \Delta_n \leq \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha} \frac{|\eta|_\sigma}{\Delta_0^{\tau+2}} \sum_{n \geq 0} \Delta_n \\ &= \frac{c(\tau, \sigma)}{\alpha} \frac{|\eta|_\sigma}{\Delta_0^{\tau+2}} (\sigma - \sigma'), \end{aligned}$$

wobei wir (5.2) und die Monotonie von $(|\eta_n|_{\sigma_n}/\Delta_n^{\tau+2})$ benutzt haben. \square

Quellen

- Katok, Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- Wayne, *An introduction to KAM Theory*, available at the author website, 2008.